



TITLE:

# 高次微分とその応用 (ガロア理論について)

AUTHOR(S):

石橋, 康德

---

CITATION:

石橋, 康德. 高次微分とその応用 (ガロア理論について). 数理解析研究所  
講究録 1975, 235: 66-74

ISSUE DATE:

1975-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105490>

RIGHT:

# 高次微分とその応用

福岡教育大学 石橋康徳

$R$  を algebraic variety  $V/k$  上の点の local ring とし.  $\Omega_k^1(R)$  を  $R$  の  $k$ -differentials のなす  $R$ -module とする. 簡単のために  $k$  は perfect field とする. 次のことはよく知られている.

(1) Y. Nakai [8], E. Kunz [5].

$R$  は regular local ring である.  $\Leftrightarrow \Omega_k^1(R)$  は free  $R$ -module である.

したがって,  $\text{Der}^1(R/k) \cong \text{Hom}_R(\Omega_k^1(R), R)$  を考えると,  $R$  が regular ならば,  $\text{Der}^1(R/k)$  は free  $R$ -module である. この逆について, 次のことが分っている.

(2) J. Lipman [6].

$k$  の標数が 0 のときには,  $\text{Der}^1(R/k)$  が  $R$ -free ならば,  $R$  は normal である. 特に,  $\dim V = 1$  ならば,  $R$  は regular である.

$\dim V \geq 2$  のときにも,  $R$  は regular であるだろうと予想されているが, 未だ解決していない. この予想に関して, 最も良い結果は次のものだろう.

(3) G. Scheja - U. Storch [10].

$k$  の標数が 0 で、 $V$  が hypersurface のときには、 $\text{Der}^1(R/k)$  が  $R$ -free ならば、 $R$  は regular である。

ところで、 $k$  の標数が  $p > 0$  のときには、 $\dim V = 1$  であっても、 $\text{Der}^1(R/k)$  の  $R$ -freeness は  $R$  の regularity を意味しない。  
[6].

これらに対して、高次微分を使って、 $R$  の regularity を特徴づけられないかと考える。現に、いくつかの結果が得られているが、それらについて述べる前に少し準備をしよう。

$k$ ,  $R$  を commutative rings とし、 $R$  を  $k$ -algebra とする。  
 $k$ -linear mapping  $D: R \rightarrow R$  が、 $n$ -th order derivation であるとは、 $\forall x_0, x_1, \dots, x_n \in R$  に対して、

$$D(x_0 x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_{n-1}} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}} D(x_0 \cdots \hat{x}_i \cdots \hat{x}_{i_{n-1}} \cdots x_n)$$

となるときをいう。

$R/k \rightarrow R$  なる  $n$ -th order derivations 全体の集合を  $\text{Der}^n(R/k)$  と表わすと、 $\text{Der}^n(R/k)$  は、自然に left  $R$ -module になる。

次のことが成っている。[9].

a)  $m \geq n \Rightarrow \text{Der}^n(R/k) \subset \text{Der}^m(R/k)$ .

$\text{Der}^n(R/k) - \text{Der}^{n-1}(R/k)$  の元を、proper  $n$ -th order derivation とする。

b)  $D \in \text{Der}^m(R/k), E \in \text{Der}^n(R/k) \Rightarrow DE \in \text{Der}^{m+n}(R/k)$ .

1) 仮定して.

$$\text{Der}(R/k) = R \oplus \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Der}^n(R/k)$$

とおくと、これは  $\text{Hom}_k(R, R)$  の subring になる。  $\text{Der}(R/k)$  を  $R/k$  の derivation algebra という。一方、  $\text{Der}^1(R/k)$  によって生成される  $\text{Der}(R/k)$  の subalgebra を  $\text{der}(R/k)$  と表わす。

Y. Nakai の予想.

$R$  を algebraic variety  $V/k$  上の某の local ring とする。  $k$  の標数が 0 ならば、次のことは同値である。

- 1)  $R$  は regular である。
- 2)  $\text{Der}(R/k) = \text{der}(R/k)$ 。

これに関連して、次のような予想がある。

T. Bloom の予想.

$V$  を analytic space とし、  $p \in V$  とする。  $\text{Diff}(V)$  によって、  $V$  上の differential operators の sheaf を表わす。この sheaf の某  $p$  における stalk  $\text{Diff}_p(V)$  が  $\mathcal{O}_p(V)$ -algebra として、  $\text{Der}_p^1(V)$  によって生成されるならば、  $V$  は  $p$  で non-singular である。

注意。  $\text{Diff}_p(V) = \text{Der}(\mathcal{O}_p(V)/\mathbb{C})$ ,  $\text{Der}_p^1(V) = \text{Der}^1(\mathcal{O}_p(V)/\mathbb{C})$  である。

Y. Nakai の予想について.

1)  $\Rightarrow$  2) は明らかに成立する。問題は 2)  $\Rightarrow$  1) である。今迄のところ、次の結果が得られている。

(4) K.R. Mount - O.E. Villamayor [7].

$\dim V=1$  ならば, Y. Nakai の予想は正しい.

(5) W. Brown [3].

$\text{depth } \mathfrak{f}=1$  なる  $R$  の prime ideal については,  $\text{ht } \mathfrak{f}=1$  と仮定する. このときには, Y. Nakai の予想は正しい. したがって,  $R$  が Macaulay ring ならば, Y. Nakai の予想は正しい.

ところで, 最近 purdue の J. Becker は, T. Bloom の予想を肯定的に解決した. [1].

次に, ground field  $k$  の標数が  $p > 0$  の場合を考えよう. この場合, Y. Nakai の予想の自然な一般化は次のようになるであろう.

$R$  は regular である.  $\Leftrightarrow \text{Der}(R/k)$  は, proper  $p^i$ -th order derivations ( $i=0,1,2,\dots$ ) によって生成される.

これに関して,  $\dim V=1$  の場合に, いくらか弱い結果を得た. それを述べる前に, higher derivation について説明しよう.

$R/k$  の higher derivation とは,  $R \rightarrow R$  なる  $k$ -linear mappings の infinite sequence  $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \dots\}$  で,  $\forall x, y \in R$  に対して,

$$\delta_n(xy) = \sum_{i=0}^n \delta_i(x) \delta_{n-i}(y) \quad (\forall n)$$

となるものをいう.  $\delta_n \in \text{Der}^n(R/k)$  である. [9]. さらに,

$\delta_i \delta_j = \binom{i+j}{i} \delta_{i+j}$  かとみえられるとき, この higher

derivation は iterative であるという。

定理.  $V$  は、代数体  $k$  上定義された algebraic curve とする。  $R$  によって、  $V$  上の  $k$ -rational point の local ring を表わす。 次のことは同値である。

- 1)  $R$  は regular である。
- 2)  $R/k$  の iterative higher derivation で、その components が  $R$ -algebra  $\text{Der}(R/k)$  を生成するものが存在する。

注意.  $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \dots\}$  を、  $R/k$  の iterative higher derivation とすると、  $\delta_i \delta_j = \binom{i+j}{i} \delta_{i+j}$  だから、その components が、  $R$ -algebra として、  $\text{Der}(R/k)$  を生成する。  $\Leftrightarrow$  その components が、  $R$ -module として、  $\text{Der}(R/k)$  を生成する。

証明. 本質的な部分は、  $2) \Rightarrow 1)$  の証明で、しかも、  $k$  の標数  $p > 0$  の場合である。証明の概略を述べよう。詳細は [4] を参照されたい。  $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \dots\}$  を、条件をみたす  $R/k$  の iterative higher derivation とする。  $R \rightarrow R$  なる high order derivation は continuous だから、  $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \dots\}$  は、一意的に、  $\hat{R}/k$  の higher derivation に延長される。延長したものを同じ記号で表わす。ここに、  $\hat{R}$  は  $R$  の completion を表わす。ところで、

$$\text{Der}(\hat{R}/k) \cong \hat{R} \otimes_R \text{Der}(R/k)$$

だから、仮定によって、  $\hat{R}/k$  の任意の high order derivation

は、 $\delta_1, \delta_2, \dots$  の  $\hat{R}$ -linear combination である。  $\bar{R}$  (resp.  $\hat{\bar{R}}$ ) によって、 $R$  の商体 (resp.  $\hat{R}$  の全商環) における integral closure を表わすと。

$$\hat{\bar{R}} \cong \hat{\bar{R}} \cong k[[t_1]] \oplus \dots \oplus k[[t_n]]$$

である。ここに、 $\hat{\bar{R}}$  は semi-local ring  $\bar{R}$  の Jacobson radical による completion である。

$$\partial_i^{(j)}(t_j^m) = \binom{m}{i} t_j^{m-i} \quad (1 \leq j \leq n, i \geq 1)$$

によって定義される  $k[[t_j]]$  の  $i$ -th order derivation  $\partial_i^{(j)}$  を考え。

$$D_i = \partial_i^{(1)} \oplus \dots \oplus \partial_i^{(n)} \quad (i \geq 1)$$

と置く。  $\{D_i\}_{i \geq 1}$  は、 $\hat{\bar{R}}$ -module  $\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{Der}^m(\hat{\bar{R}}/k)$  の free basis である。しかも、 $\{1, D_1, D_2, \dots\}$  は、 $\hat{\bar{R}}/k$  の iterative higher derivation である。  $L = \hat{L} : \hat{\bar{R}}$  と置く。  $k[[t_i]]$  の単位元を  $e_i$  と表わすと。

$$e_i L = (t_i^{a_i}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

となる。  $R$ 。したがって、 $\hat{R}$  が regular ではないとすると。

ある  $a_i \geq 1$  となる。例えば、 $a_1 \geq 1$  としよう。このときには、

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (e_1 L)^k = (0)$$

である。これか、矛盾を与えることを示そう。整数  $n$  を、

$$p^n \geq \max(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ となるようにとる。 } D \in \text{Der}^{p^n}(\hat{\bar{R}}/k)$$

は、

$$D = g_n D_{p_n} + (\text{lower order}), \quad g_n \in \widehat{R}$$

と書ける。実は、このとき、

$$D(\widehat{R}) \subset \widehat{R} \implies g_n \in L$$

となることか示される。  $f \in L$ ,  $e_1 f \neq 0$  とする。

$f D_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}}$  は、 $\widehat{R} \rightarrow \widehat{R}$  なる high order derivation を与える。したがって、仮定により、

$$f D_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}} = b \delta_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}} + (\text{lower order}), \quad b \in \widehat{R} \quad (*)$$

と表わせる。ところが、

$$\delta_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}} = \delta_{p_1} \delta_{p_{n+1}} \dots \delta_{p_{n+s}} z^n.$$

$$\delta_{p_i} = g_i D_{p_i} + (\text{lower order}), \quad g_i \in \widehat{R} \quad (n \leq i \leq n+s)$$

だから、これらを (\*) の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned} f D_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}} &= b (g_n D_{p_n} + \dots) \dots (g_{n+s} D_{p_{n+s}} + \dots) \\ &= b g_n \dots g_{n+s} D_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}} + \dots \end{aligned}$$

となる。

$$\therefore f = b g_n \dots g_{n+s}.$$

ところが  $z^n \delta_{p_i}(\widehat{R}) \subset \widehat{R}$  であり、 $\delta_{p_i} \in \text{Der}^{p_i}(\widehat{R}/k)$  と考えられるから、 $g_i \in L$  ( $n \leq i \leq n+s$ ) である。

$$\therefore e_1 f = e_1 b g_n \dots g_{n+s} \in (e_1 L)^s.$$

$s$  は任意だから、

$$e_1 f (\neq 0) \in \bigcap_s (e_1 L)^s = (0). \quad \text{矛盾!}$$

$\text{g. e. d.}$



# 参考文献

- [1] J. Becker, Differential operators on complex analytic sets and a condition for nonsingularity, to appear.
- [2] T. Bloom, Operateurs differentiels elliptiques sur un espace analytique, Seminaire Lelong, 158 - 166. Lecture Notes in Math. 275, Springer 1972.
- [3] W. Brown, Higher derivations on finitely generated integral domains, proc. Amer. Math. Soc., 42 (1974), 23 - 27.
- [4] Y. Ishibashi, A characterization of one dimensional regular local rings in terms of high order derivations, Bull. Fukuoka Univ. Education, 24 - III (1975), 11 - 18.
- [5] E. Kunz, Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen, J. r. u. a. Math., 204 (1960), 166 - 182.
- [6] J. Lipman, Free derivation modules on algebraic varieties, Amer. J. Math., 87 (1965), 874 - 898.
- [7] K.R. Mount - O.E. Villamayor, On a conjecture of Y. Nakai, Osaka J. Math., 10 (1973), 325 - 327.
- [8] Y. Nakai, On the theory of differentials in commutative rings, J. Math. Soc. Japan, 13 (1961), 63 - 84.
- [9] Y. Nakai, High order derivations I, Osaka J. Math., 7 (1970), 1 - 27.

- [10] G. Scheja - U. Storch, Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischen Algebren, Math. Ann., 197 (1972), 137 - 170.